Les séries entières

M6 – Chapitre 4

I. Définition

Une série entière est une série de la forme $\boxed{\sum a_n z^n}$ $\quad z \in \mathbb{C}$

II. Rayon de convergence

1. Théorème

$|a_n r^n|$ suite bornée $\Rightarrow \ \forall\, \rho \in [0, r] \ \sum a_n \rho^n$ C.N. sur $\mathcal{D}(O, r)$

2. Définition

R est le plus grand nombre tel que $|a_n r^n|$ soit bornée.
Si $|a_n r^n|$ bornée $\forall\, r \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$

3. Critère de d'Alembert

$$\text{Si} \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} l > 0 \Rightarrow R = \dfrac{1}{l} \\ l = 0 \Rightarrow R = +\infty \end{cases}}$$

III. Opérations sur les séries entières

1. Opérations simples

Des séries entières de même rayon s'ajoutent et se multiplient pour donner des séries entières de même rayon.

2. Dérivation

a. Théorème

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n z^n)'} \quad \text{et ont même rayon de conv}$$

b. Corollaire

$$\text{Soit } S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

- $S(z)$ dérivable une infinité de fois
- $S^{(k)}(z) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n \, z^{n-k} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(q+k)!}{q!} a_{q+k} \, z^q$ est une série entière
- $\boxed{S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} z^n}$